Printed Pages – 8

I-205

B.Sc. (Part-II) Examination, 2020

MATHEMATICS

Paper - I

(Advanced Calculus)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न के किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्न के अंक समान हैं।

Note : All questions are compulsory. Solve any two parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई–I / UNIT-I

Q. 1. (a) सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\{(m+1)(m+2) \ldots\ldots\ldots (m+n)\}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{e}$$

Prove that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\{(m+1)(m+2) \ldots\ldots\ldots (m+n)\}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{e}$$

(b) दिखाइये कि श्रेणी $\sum (-1)^n \left\{\sqrt{n^2+1} - n\right\}$ प्रतिबन्धी अभिसारी है।

Show that the series $\sum (-1)^n \left\{\sqrt{n^2+1} - n\right\}$ is conditionally convergent.

(c) दिखाइये कि श्रेणी

$x^2(\log 2)^q + x^3(\log 3)^q + x^4(\log 4)^q + \ldots\ldots, x > 0$

अभिसारी होगी यदि $x < 1$ और अपसारी होगी यदि $x \geq 1$

Show that the series

$x^2(\log 2)^q + x^3(\log 3)^q + x^4(\log 4)^q + \ldots\ldots, x > 0$

is convergent if $x < 1$ and divergent if $x \geq 1$.

इकाई–II / UNIT-II

Q. 2. (a) निम्न फलन f(x) का x = 0 पर सांतत्य परीक्षण कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x + 4\tan x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ k & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Test the following function for continuity at x = 0.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x + 4\tan x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ k & , \quad x = 0 \end{cases}$$

(b) अन्तराल [a, b] में फलन $f(x) = \log \dfrac{x^2 + ab}{(a+b)x}$ के लिये रोले प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = \log \dfrac{x^2 + ab}{(a+b)x}$ in the interval [a, b].

(c) लाग्रांज के मध्यमान प्रमेय :

$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(r)$

में r का मान ज्ञात कीजिए, यदि $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, जहाँ A, B, C अचर हैं तथा $A \neq 0$

If $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, where A, B, C are constants and $A \neq 0$, then find the value of r in Lagrange's mean value theorem

$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(r)$

इकाई–III / UNIT-III

Q. 3. (a) यदि $x^x y^y z^z = c$, तो दर्शाइये कि $x = y = z$ पर

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log ex)^{-1}$$

If $x^x y^y z^z = c$, then show that

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log ex)^{-1}$$ when $x = y = z$.

(b) समीकरण $(1+x^2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1+x^2)\frac{dy}{dx} + y = 0$

का रूपान्तरण $x = \tan z$ रखकर कीजिए।

Transform the equation

$$(1+x^2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1+x^2)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

by putting $x = \tan z$.

(c) यदि $u = x^2 + y^2 + z^2$, $v = x + y + z$, $w = xy + yz + zx$ दर्शाइये कि जैकोबियन $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = 0$, u, v और w के बीच सम्बन्ध ज्ञात कीजिए।

If $u = x^2 + y^2 + z^2$, $v = x + y + z$, $w = xy + yz + zx$, show that the Jacobian $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = 0$. Find the relation between u, v and w.

इकाई–IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के केन्द्रज का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the evolute of the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(b) फलन $u = x^4 + 2x^2y - x^2 + 3y^2$ के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ होने की विवेचना कीजिए।

Discuss the maxima or minima of the function $u = x^4 + 2x^2y - x^2 + 3y^2$.

(c) सिद्ध कीजिए कि एक गोले के अन्तर्गत महत्तम आयतन वाला आयताकार एक घन होता है।

Prove that the rectangular solid of maximum volume tnat can be inscribed in a sphere is a cube.

इकाई–V / UNIT-V

Q. 5. (a) सिद्ध करो कि :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x\log\left(\frac{1}{x}\right)}}dx = \sqrt{2\pi}$$

Prove that :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x\log\left(\frac{1}{x}\right)}}dx = \sqrt{2\pi}$$

(b) द्विशः समाकल $\iint_R e^{2x+3y}\,dx\,dy$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ R, रेखाओं x = 0, y = 0 तथा x + y = 1 से परिबद्ध त्रिभुजीय क्षेत्र है।

Find the value of double integral $\iint_R e^{2x+3y}\,dx\,dy$, where R is the region bounded by x = 0, y = 0 and x + y = 1.

(c) निम्नलिखित समाकल का मूल्यांकन समाकलन के क्रम को बदलकर कीजिए :

$$\int_0^a \int_y^a \frac{x\,dy\,dx}{x^2+y^2}$$

Evaluate the following integral by changing the order of integration :

$$\int_0^a \int_y^a \frac{x\,dy\,dx}{x^2+y^2}$$